Литература

1. Wojtaszczyk P. *A mathematical introduction to wavelets.* – Cambridge.: CUP, 1997. – 261 p.

2. Базарханов Д. Б. *Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I* // Тр. МИ РАН. – 2010. – Т. 269. – С. 8–30.

3. Bazarkhanov, D.B.: Hyperbolic cross approximation of some function classes w. r. t. multiple Haar system on the unit cube // Springer Conference Proceedings. — 2017.

HYPERBOLIC CROSS APPROXIMATION OF SOME MULTIVARIATE FUNCTION CLASSES W. R. T. WAVELET SYSTEM WITH COMPACT SUPPORTS

Sh. Balgimbayeva

We obtain estimates, sharp in order, for hyperbolic cross approximation w.r.t. d*–multiple wavelet system with compact supports* $\psi^{(\mathrm{d})}$ *of the Nikol'skii – Besov and Lizorkin – Triebel type classes associated with this system in the space* $L_q([0,1]^d)$ *for a number of relations between the parameters of the classes and the space.*

Keywords: Fourier width, hyperbolic cross, the Nikol'skii – Besov type space, the Lizorkin – Triebel type space.

УДК 621.391.1 : 519.6

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ

А.А. Барышев[1], Г.А. Бондаренко[2], Д.С. Лукомский[3]

1 *baryshevaa@gmail.com*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет
2 *gebond77@gmail.com*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет
3 *lukomskiids@info.sgu.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет

В статье обсуждается реализация численного алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье на локальных полях положительной характеристики. В качестве примера применения алгоритма приводится сжатие изображений.

Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, локальные поля, численный алгоритм, сжатие изображений.

Данная работа посвящена вопросу численной реализации быстрого преобразования Фурье на локальных полях, рассмотренного в работе С.Ф. Лукомского и А.М. Водолазова [1]. Необходимо отметить, что в настоящее время в информационных технологиях активно применяются алгоритмы, использующие различные свойства преобразования Фурье по разнообразным системам. Будем рассматривать применение алгоритма на примере сжатия изображений.

Под локальным полем K понимают локально компактное, вполне несвязное, недискретное, полное топологическое пространство, в котором определены непрерывные операции "$\dot{+}$", "$\cdot$" – сложения и умножения, для которых выполнены аксиомы поля. В поле K вводят оператор растяжения следующим образом. Единичный шар

$$\mathscr{D} = \{x \in K : |x| \le 1\},\ \mu\mathscr{D} = 1.$$

является кольцом, в котором существует единственный максимальный идеал

$$\mathscr{B} = \{x \in K : |x| < 1\}.$$

Элемент $\mathfrak{p} \in \mathscr{B}$ с наибольшей нормой $|\mathfrak{p}|$ называют примитивным элементом. Для него $\mu\mathscr{B} = |\mathfrak{p}| = \frac{1}{p^s}$, где p – простое, $s \in \mathbb{N}$. Если $x \in \mathscr{D} \setminus \mathscr{B}$, то $|x| = 1$. Если для любого $a \in K$ произведение $pa \overset{df}{=} \underbrace{a + a + \cdots + a}_{p} = 0$, то число p называют характеристикой поля K.

Пусть p – простое и s – натуральное. Конечное поле $GF(p^s)$ состоит из векторов

$$\mathbf{a} = (a^{(0)}, a^{(1)}, ..., a^{(s-1)}),$$

в которых компоненты $a^{(j)}$ принимают значения от 0 до $p-1$, операция сложения определяется покомпонентно по модулю p. Локальное поле $K = F^{(s)}$ положительной характеристики p изоморфно множеству формальных степенных рядов

$$a = \sum_{i=k}^{\infty} a_i t^i, k \in \mathbb{Z}, ,\ a_i \in GF(p^s)$$

Операции сложения и умножения определяются как сумма и произведение таких рядов. Можно считать, что локальное поле $F^{(s)}$ характеристики p состоит из бесконечных в обе стороны последовательностей

$$a = (\ldots, \mathbf{0}_{n-1}, \mathbf{a}_n, \ldots, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots),\ \mathbf{a}_j \in GF(p^s)$$

в которых лишь конечное число элементов $\mathbf{a}_j$ с отрицательными номерами отлично от нуля.

Пусть $f^{(N)}$ – ступенчатая функция. Обозначим ее значения на смежных классах

$$K_N \dot{+} \mathbf{a}_{N-1} g_{N-1} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{a}_1 g_1 \dot{+} \mathbf{a}_0 g_0 \subset K_0.$$

через

$$f^{(N)}_{\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0} := f^{(N)}(K_N \dot{+} \mathbf{a}_{N-1} g_{N-1} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{a}_1 g_1 \dot{+} \mathbf{a}_0 g_0)$$

Таким образом, преобразование Фурье вектору значений

$$f^{(N)}_{\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}$$

ставит в соответствие вектор коэффициентов $c_{\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{N-1}}$.
Можно считать, что вектор значений функции $f^{(N)}$ есть вектор

$$\mathbf{F} = f^{(N)}_{\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0} = \left| \text{т.к. } \mathbf{a}_m = (a_m^{(0)}, a_m^{(1)}, \ldots, a_m^{(s-1)}), a_m^{(j)} = \overline{0, p-1} \right| =$$

$$= f^{(N)}_{a_{N-1}^{(0)} a_{N-1}^{(1)} \ldots a_{N-1}^{(s-1)}, a_{N-2}^{(0)} a_{N-2}^{(1)} \ldots a_{N-2}^{(s-1)}, \ldots, a_1^{(0)} a_1^{(1)}, \ldots, a_1^{(s-1)}, a_0^{(0)} a_0^{(1)}, \ldots, a_0^{(s-1)}}.$$

Будем полагать, что $f^{(N)}_{\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}$ занумерованы индексом

$$n = (a^{(0)}_{N-1} + a^{(1)}_{N-1}p + \cdots + a^{(s-1)}_{N-1}p^{s-1}) + p^s(a^{(0)}_{N-2} + a^{(1)}_{N-2}p + \cdots + a^{(s-1)}_{N-2}p^{s-1}) + \cdots +$$
$$+ p^{s(N-1)}(a^{(0)}_0 + a^{(1)}_0 p + \cdots + a^{(s-1)}_0 p^{s-1}). \qquad (1)$$

Далее приведем формулы обратного преобразования Фурье

$$f^{(n)}_{(\bar{\alpha}_N\ldots\bar{\alpha}_n)\mathbf{a}_{n-1}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0} = \sum_{\bar{\alpha}_{n-1}\in GF(p^s)} p^{\frac{-s}{2}} e^{\frac{2\pi i}{p}(\bar{\alpha}_{n-1},\mathbf{a}_{n-1})} p^{\frac{s}{2}} f^{(n-1)}_{(\bar{\alpha}_N,\ldots\bar{\alpha}_{n-1})\mathbf{a}_{n-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}. \qquad (2)$$

Так как матрица системы (2) унитарна, то ее решение имеет вид

$$f^{(n-1)}_{(\bar{\alpha}_N\ldots\bar{\alpha}_{n-1})\mathbf{a}_{n-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0} = \sum_{\mathbf{a}_{n-1}\in GF(p^s)} p^{-s} e^{-\frac{2\pi i}{p}(\bar{\alpha}_{n-1},\mathbf{a}_{n-1})} f^{(n)}_{(\bar{\alpha}_N,\ldots\bar{\alpha}_n)\mathbf{a}_{n-1}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}, \qquad (3)$$

Это прямое преобразование Фурье. После предпоследнего шага получаем равенства

$$f^{(1)}_{(\bar{\alpha}_N,\bar{\alpha}_{N-1},\ldots,\bar{\alpha}_1)\mathbf{a}_0} = \sum_{\bar{\alpha}_0\in GF(p^s)} e^{\frac{2\pi i}{p}(\bar{\alpha}_0,\mathbf{a}_0)} f^{(0)}_{(\bar{\alpha}_N,\bar{\alpha}_{N-1},\ldots,\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_0)},$$

из которых находим коэффициенты Фурье

$$c_{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\ldots\bar{\alpha}_N} = f^{(0)}_{(\bar{\alpha}_N,\bar{\alpha}_{N-1},\ldots,\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_0)}$$

по формулам (3). Таким образом (3) и (2) – расчетные формулы для прямого и обратного преобразования Фурье соответственно.

Общее количество операций равно $(N+1)\cdot 2p^{2s}\cdot p^{Ns} = 2(N+1)p^{s(N+2)}$.

При реализации данного алгоритма возникает ряд задач, имеющих отношение как к самому БПФ, так и к его практическому применению (например, к сжатию изображений). Первая задача – это организация цикла при вычислении БПФ при произвольном значении s. Чтобы избежать необходимости написания различного количества циклов при разном значении параметра s, вводится отношение порядка в p-ичной системе, количество операций в этом случай увеличивается на множитель sN.

Далее рассмотрим практические задачи на примере сжатия изображений. Изображение можно трактовать как матрицу фиксированного размера, элементами которой являются номера цветов точек в цветовой палитре. Разобьем исходную матрицу на подматрицы размерности $p^N \times p^N$, где p – простое. Данную матрицу будем рассматривать как вектор длины p^{sN}, где $s = 2$. Таким образом, имеем кусочно постоянную функцию f^N, принимающую p^{sN} значений. Далее к ней применяем прямое преобразование Фурье (2), сортируем коэффициенты по убыванию модуля и обнуляем некоторый процент наименьших коэффициентов. Затем применяем обратное преобразование (1) и восстанавливаем изображение.

Отметим проблемы, возникающие при реализации данного алгоритма, которые влияют на вычислительную сложность. В формулах прямого и обратного преобразования для нумерации значений функции и коэффициентов используется мультииндекс $\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0$, который необходимо преобразовать в десятичное представление и наоборот.

Процедуры пересчета нумерации (преобразования индексов) в приведенных формулах преобразования Фурье не рассматриваются, однако они вносят значительную вычислительную сложность в прикладной задаче. Поэтому необходимо решить следующие проблемы:

1. подсчет мультииндекса по номеру значения функции, задаваемому равенством (1);
2. подсчет номера значения функции по мультииндексу из равенства (1).

Здесь под номером значения функции понимается номер элемента (номер пикселя) в одномерном массиве, полученном из цветовой матрицы. Условимся, что во избежании вложенных итераций основного цикла к исходному массиву размерности s будем обращаться по индексу. Например, если $s = 2$, то к двумерному массиву $funArray[,]$ по номеру N можем обратиться, используя преобразование:

```
int i = (int) N / funArray.len;
int j = N - ( funArray.len * i );
```

Далее, пункт 1 может быть реализован при помощи предварительного подсчета структуры типа Словарь. Для заданных p и s можно пересчитать все комбинации номеров от 0 до p^{sN} и подставить в соответствие каждому мультииндексу число:

```
Map<int, multiindex> map;
for multiindex in gfield(p,s):
int num = calculate(multiindex)
map.add(num, multiindex)
```

$gfield(p,s)$ – это локальное поле состоящее из всевозможных мультииндексов. $int \quad n = calculate(multiindex)$ – это прямой подсчет по формуле (1). Данный подход позволяет сделать пересчет каждого номера лишь один раз при запуске программы и на каждой итерации преобразования обращаться к map по номеру. Алгоритмическая сложность такого подхода близка к $O(1)$, т.е. зависит от времени обращения к элементу массива.

Пункт 2 может быть реализован аналогично при помощи предварительного подсчета многомерного массива размерности ps, для заданных p и s можно пересчитать все комбинации номеров от 0 до p^{sN}. Необходимо в целевой многомерный массив разместить номера значений по координатам, соответствующим компонентам мультииндекса. Приведем пример при $p = 2$, $s = 2$:

```
for multiindex in gfield(p,s):
int num = calculate(multiindex)
map.add(num, multiindex)
vectors[multiindex[0][0], multiindex[0][1], multiindex[1][0],
multiindex[1][1], multiindex[2][0], multiindex[2][1]] = num;
```

таким образом, многомерный массив заполнен числами от 0 до p^{sN} и координаты каждого числа образуют компоненты мультииндекса, поэтому по заданному мультииндексу можно получить соответствующий номер за время, зависящее от скорости обращения к элементам массива.

После реализации данных алгоритмов использование БПФ по заданным формулам обладает необходимой вычислительной сложностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152)

Литература

1. Лукомский С.Ф, Водолазов А.М. *Быстрое дискретное преобразование Фурье на локальных полях положительной характеристики* // Проблемы передачи информации. – 2017. – Т. 53. – Вып. 2. – С. 60–69.

IMPLEMENTATION OF FAST FOURIER TRANSFORM ON LOCAL FIELDS

A.A. Baryshev, G.A. Bondarenko, D.S. Lukomskii

The implementation of numerical algorithm of fast Fourier transform on local fields of positive characteristic is discussed in the paper. Image compression is presented as an example of application of the algorithm.

Keywords: discrete Fourier transform, local fields, numerical algorithm, image compression.

УДК 517.982.256 + 515.124.4

О МНОЖЕСТВЕ ST(M_4) В ПРЕДУАЛЬНОМ К L_1 ПРОСТРАНСТВЕ

Б.Б. Беднов[1]

1 *noriiii@inbox.ru*; МГУ им. М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э. Баумана

Исследуется множество точек Штейнера четырёх элементов предуального к L_1 пространства.

Ключевые слова: банахово пространство, пространство Линденштраусса, точка Штейнера, липшицева выборка.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Для заданного набора $M_n = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ множество точек Штейнера $\mathrm{st}(M_n)$ состоит из таких точек $s \in X$, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k - s\| = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{n} \|x_k - x\| : x \in X \right\} =: |\mathrm{st}|(M_n).$$

Пространство X называется предуальным к L_1 или пространством Линденштраусса, если X^* изометрически изоморфно $L_1(\mu) = L_1(E, \Sigma, \mu)$ для некоторого множества E, некоторой σ-алгебры Σ подмножеств E и некоторой σ-аддитивной меры μ, определенной на Σ. К этому классу пространств относятся все пространства $C[K]$ действительнозначных функций, непрерывных на (хаусдорфовом) компакте K, пространства $c_0(E)$, l_∞ и многие другие. Пространство размерности n предуально к L_1 тогда и только тогда, когда оно изометрически изоморфно l_∞^n (здесь l_∞^n обозначает n-мерное пространство с нормой $\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \max\{|x_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$). Пространства Линденштраусса хорошо изучены (см. [1], [2], а также [3]).

В предуальном к L_1 пространстве множество точек Штейнера $\mathrm{st}(M_n)$ не пусто [4] для произвольного множества $M_n \subset X$, а само множество $\mathrm{st}(M_n)$ можно охарактеризовать [5] при помощи метрических отрезков (*метрический отрезок* с концами a